



TITLE:

# Fusion Algebras and Mapping Class Groups

AUTHOR(S):

河野, 俊丈

---

CITATION:

河野, 俊丈. Fusion Algebras and Mapping Class Groups. 数理解析研究所  
講究録 1991, 768: 160-166

ISSUE DATE:

1991-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82317>

RIGHT:

## Fusion Algebras and Mapping Class Groups

河野俊文 (九大理)

### 1. Introduction

Fusion algebra は 1980 年代後半, E. Verlinde によって 2次元共形場理論にあらわれる“場のオペレーター”の coupling を記述するために導入された ある種の可換な associative algebra で, Verlinde algebra ともよばれている. E. Verlinde は, この algebra が共形場理論の modular 変換  $S$  を記述する行列によつて“対角化”されることを指摘し, 一連の character formula を提唱した. Fusion algebra の構造は代数的組み合わせ論の association scheme とよく似ており, 今後, 両方の分野の共同研究により発展することが期待される. 一方, fusion algebra は Riemann 面の mapping class group (Teichmüller modular group) の表現を与えていて, 3次元多様体の位相不変量にも応用されている. まず, Verlinde 以来, よく研究されている  $SU(2)$ -WZW (Wess-Zumino-Witten) model から解説する.

## 2. $SU(2)$ - WZW model の fusion rule

物理的背景については、文献 [BPZ] などを参照していただくことにし、ここでは対象とする algebra のみを具体的に述べる。  $K$  を positive integer として、固定する。この数は、しばしば level とよばれることもある。  $R_K$  を、  $\{v_j\} \ 0 \leq j \leq \frac{K}{2} \quad (j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots)$  ただし  $v_0=1$  を生成元とし、次のように構造定数  $N_{ijk}$  で定義される可換な associative algebra とする。

$$v_i \cdot v_j = \sum_k N_{ijk} v_k$$

ここで

$$N_{ijk} = \begin{cases} 1 & (*) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(\*) の条件は、

$$\begin{cases} |i-j| \leq k \leq i+j \\ i+j+k \in \mathbb{Z} \\ i+j+k \leq K \end{cases}$$

で、はじめの2つの条件が、いわゆる Clebsch-Gordan condition である。  $R_K$  は、  $sl(2, \mathbb{C})$  の表現環のある種の truncation とみなすことができる。 ここで

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{K+2}} \sin \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{K+2}$$

とおき、

$$w_i = S_{0i} \sum_m S_{im} v_m$$

と変換すると,  $w_i \cdot w_j = \delta_{ij} w_j$  が成立する. これは代数的には, 等式

$$\frac{S_{ij} S_{ik}}{S_{0i}} = \sum_m S_{im} N_{mj k}$$

と同値で, この種の一連の等式を Verlinde formula とよぶこともある. 最近, T. Takata により, 量子群の 1 の中根における表現論と 3次元多様体の link の不変量についての [R-T] の手法を用いた, 見通しのよい証明が与えられた.

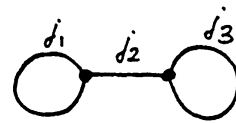
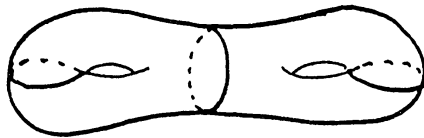
ここで注目すべき点は, 行列  $S$  が Kac-Peterson [K-P] によって得られた  $A_1^{(n)}$ -type の affine Lie 環の character の modular 変換  $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$  による変換規則と一致していることである. つまり  $\{\chi_j\}_{0 \leq j \leq \frac{K}{2}}$  を level  $K$  integrable highest weight module の character とするとき,

$$\chi_j(-\frac{1}{\tau}) = \sum S_{ij} \chi_i(\tau)$$

$$\chi_j(\tau+1) = \exp 2\pi\sqrt{-1}(\Delta_j - \frac{c}{24}) \chi_j(\tau)$$

ここで  $\Delta_j = \frac{j(j+1)}{K+2}$ ,  $c = \frac{3K}{K+2}$  が成立している.

この行列  $S$  と  $T = \text{diag}(\exp 2\pi\sqrt{-1}(\Delta_j - \frac{c}{24}))$   
 および fusion matrix  $(F_{ij}[\begin{smallmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{smallmatrix}])$  (具体的には  
 $q$ -6j-symbol の  $q = \exp \frac{\pi\sqrt{-1}}{k+2}$  における値で与えら  
 れる) を用いて, Riemann 面の mapping class  
 group の projectively linear representation を構成  
 することができる ([M-S], [K] 参照). 具体的  
 には, compact Riemann 面  $\Sigma$  について下図のよ  
 うに その trinion (3つ穴のあいた球面) への分割  
 を考え, その dual graph をとる. (以降これを fix する)



dual graph の edge に half integer  $0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{k}{2}$   
 のいずれかのラベルをつけ 各 vertex では fusion alg.  
 の定義に用いた (\*) の条件をみたすとする. このような  
 ラベル, つきのグラフ全体と 一対一に対応する basis  
 をもつ vector space を  $Z(\Sigma)$  とする. (\*) 上の  
 $S, T, F$  を用いて mapping class group  
 の  $Z(\Sigma)$  への作用を構成できる. また  
 グラフを別の選び方で決めたときの vector space  
 との同一視が  $F$  によって与えられている.

$$= \sum_i F_{ij} \begin{bmatrix} d_2^i & d_3^i \\ d_1^i & d_4^i \end{bmatrix}$$

Moore-Seiberg は, initial data  $S, T, F$  などが mapping class group の表現を与えるための, 一連の条件を polynomial equation として書き下した. この中には pentagon, hexagon などの relation が含まれている. Tannaka-Krein duality の拡張として, これらの関係式を組織的に研究する. 試みか" なされている. また  $[K]$  では, この表現を用いて, 3次元多様体の位相不変量が定義された.

$$(*) \quad \dim Z(\Sigma) = \sum_j (S_{0,j})^{2-2g} \quad \text{で与えられる.}$$

### 3. 有限アーベル群に付随したモデル

前節では edge に  $sl(2, \mathbb{C})$  の表現をのせたモデルをあたったが, fusion algebra が有限アーベル群の群環となるように構成することも可能である. 簡単のため  $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  (有限巡回群) とする algebra として  $\mathbb{C}[G]$  つまり 生成元が  $\{e_j\}$   $j=0, 1, \dots, k-1$  で structure constant  $N_{ij}^l$  は  $l \equiv i+j \pmod{k}$  のとき 1 で他は 0 である.

この algebra について §2 と同様の構造が存在する.

$$\Delta_l = \frac{ml^2}{2k} \quad \left( \begin{array}{l} l=0, \dots, k-1 \\ (k,m)=1 \text{ であり } k \text{ が odd} \\ n \text{ と } m \text{ は } m \text{ even とする.} \end{array} \right)$$

このとき

$$S_{\ell\ell'} = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp 2\pi\sqrt{-1} (\Delta_{\ell+\ell'} - \Delta_\ell - \Delta_{\ell'})$$

とおくとこれは  $\mathbb{C}[G]$  を対角化しさらに  $T$  を  $\text{diag}_\ell (\exp 2\pi\sqrt{-1} \Delta_\ell)$  とおくと  $S, T$  は modular group の relation を 1 の 8 乗根の不定性を除いて満足する. ここで ambiguity は Gauss sum

$$G(m, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{l=0}^{k-1} \exp \frac{\pi\sqrt{-1} m}{k} l^2$$

により計算される. この種の  $SL(2, \mathbb{Z})$  の表現に関連した 3次元多様体の不変量をあげておく.

$M$  は closed orientable 3-manifold, であり

$M$  が framed link  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n \subset S^3$

の Dehn surgery により得られているとする.

$G = \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/k_n\mathbb{Z}$ ,  $k_i | k_{i+1}$  とし

$(k_i, m_i) = 1$ ,  $m_i$  even if  $k_i$  odd と

おとし  $m_1, \dots, m_n$  を fix する.  $L$  の linking matrix の signature を  $\sigma$  とする.

このとき

$$I_G^m(M) = \frac{[G(m_1, k_1) \cdots G(m_n, k_n)]^{-\delta}}{|G|^{m/2}} \sum_{\lambda} e^{n\pi i \sum_j \langle \chi_j, \chi_j \rangle} a_{ij}$$

17.  $M$  は homotopy invariant である. ここで  
 $(a_{ij})$  は  $L$  の linking matrix.  $\lambda : \{1, \dots, n\} \rightarrow G$  と  
 $\vec{l}_i = (l_{i1}, \dots, l_{in}) \in G^n$  について  
 $\langle \vec{l}_i, \vec{l}_j \rangle = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} l_{i\alpha} l_{j\alpha}}{k_{\alpha}}$  とする.

$G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$   $k$ : even のときは Gochô, Ohtsuki, Murakami - Okada により調べられている.

$G$  を非可換とするとき  $\text{Cent}([G])$  について同様の構成を試みるのは興味ある問題であろう.  $S'$  との直積を考え, 3次元的な計算で fusion algebra を構成した [D-W] の仕事がある.

#### References

- [BPZ] Belavin - Polyakov - Zamolodchikov,  
Nucl. Phys. B 241, 33 - (1984)
- [D-W] Dijkgraaf - Witten  
Comm. Math. Phys. 129, 393 - (1990)
- [K] Kohno, Topological invariants for 3-manifolds ---  
to appear in Topology
- [M-S] Moore - Seiberg  
Comm. Math. Phys. 123, 177 - (1989)
- [R-T] Reshetikhin - Turaev, Invariants of 3-manifolds ---  
to appear in Invent. Math.
- [V] Verlinde, Nucl. Phys. B 300, 360 - (1988)
- [K-P] Kac - Peterson, Adv. Math. 53, 125 - (1984)